თეიმურაზ ორმოცაძე[1]
სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

https://doi.org/10.52340/sou.2022.20.28

არაგეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას გეომეტრიული მიდგომების შესახებ

აბსტრაქტი. ნაშრომში განხილულია გეომეტრიული მიდგომები არაგეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას, რომელსაც შეიძლება ასევე ვუწოდოთ „არაგეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას კოორდინატთა მეთოდის გამოყენების შესახებ“. კონკრეტული, პრაქტიკული მაგალითების საფუძველზე, ჩვენს მიერ შემოთავაზებულია არაგეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის მარტივი გეომეტრიული მეთოდები.

საკვანძო სიტყვები: არაგეომეტრიული ამოცანები, პარამეტრი; ფუნქციის წარმოებული; ფუნქციის გრაფიკი, გეომეტრიული მიდგომები.

Teimuraz Ormotsadze[2]
Sokhumi State Universiti

On Geometrical Approaches in Solving Non-Geometrical Problems

Abstract: The paper discusses geometrical approaches to solving non-geometrical problems, which can also be referred to as "the use of the coordinate method in solving non-geometrical problems." Based on specific, practical examples, we propose simple geometrical methods for solving non-geometrical problems.

[1] **თეიმურაზ ორმოცაძე.** პედაგოგიკის დოქტორი. სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.
[2] **Teimuraz Ormotsadze**. Doctor of Pedagogy. Associate Professor of Sokhumi State University.

Key words: non-geometrical problems, parameter, derivative of a function, function graph, geometrical approaches

ძირითადი კვლევა. უმჯობესი იქნებოდა ამ სტატიის სათაურად აგვე-რჩია - „არაგეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას კოორდინატთა მეთოდის გამოყენების შესახებ“ - რადგან, როგორც ქვემოთ ვნახავთ, დაგვჭირდება მა-რთკუთხა კოორდინატთა სისტემაში გრაფიკების აგება და საკოორდინატო სიბრტყეზე იმ წერტილთა სიმრავლეების გამოსახვა, რომელიც ამ თუ იმ სი-ტუაციის შეესაბამისად გვექნება ამოცანიდან გამომდინარე. თუმცა ავირჩიეთ ის, რაც ავირჩიეთ, რადგან საყოველთაოდ ცნობილი ფაქტია, რომ „რენე დე-კარტმა საკოორდინატო სისტემის შემოტანით გზა გაუხსნა გეომეტრიისა დმი გამოთვლით მიდგომას და მანვე დაამუშავა კოორდინატთა მეთო-დი და დაამყარა კავშირი ალგებრასა და გეომეტრიას შორის“. ამით გვსუ-რდა კიდევ ერთხელ შეგვეხსენებინა ფართო საზოგადოებისთვის, კერძოდ ახალგაზრდა დამწყები პრაქტიკოსი მასწავლებლებისათვის და იმ მოსწავ-ლეებისათვის გადაგვეცა მძლავრი იარაღი ამოცანების ამოხსნისათვის, რო-მლებიც დაინტერესებულნი არიან ელემენტარული მათემატიკის ღრმად შე-სწავლით.

ამოცანა №1. $\boldsymbol{a}$- პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის ექნება

$$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=a \end{cases} \qquad (*)$$

განტოლებათა სისტემას ერთი ამონახსენი.

ამოხსნა: სიტუაციიდან გამომდინარე მოვიქცეთ შემდეგნაირად - $(*)$ სისტე-მის ტოლო-ბაში z გადმოვიტანოთ მარცხენა მხარეში და შევკრიბოთ მეორე ტოლობასთან მივიღებთ

$$x^2+y^2+\ x+y=a$$

აქედან კი ცხადია, რომ $(*)$ სისტემას ექნება ერთი ამონახსენი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა

$$x^2+y^2+\ x+y=a$$

განტოლებას აქვს ერთი ამონახსენი.

თუ ბოლო ტოლობაში გამოვყოფთ სრულ კვადრატებს მივიღებთ

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=a+\frac{1}{2}$$

რომელიც წარმოადგენს წრეწირის განტოლებას.

შევნიშნოთ, რომ

თუ $a < -\frac{1}{2}$ ასეთ წერტილთა სიმრავლე ცარიელია;

თუ $a = -\frac{1}{2}$ ის წარმოადგენს ერთადერთ წერტილს;

თუ $a > -\frac{1}{2}$ წარმოადგენს წრეწირს ცენტრით $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ წერტილში და $R = \sqrt{a+\frac{1}{2}}$ რადიუსით, ანუ ამ შემთხვევაში გააჩნია უსასრულოდ ბევრი ამონახსენი.

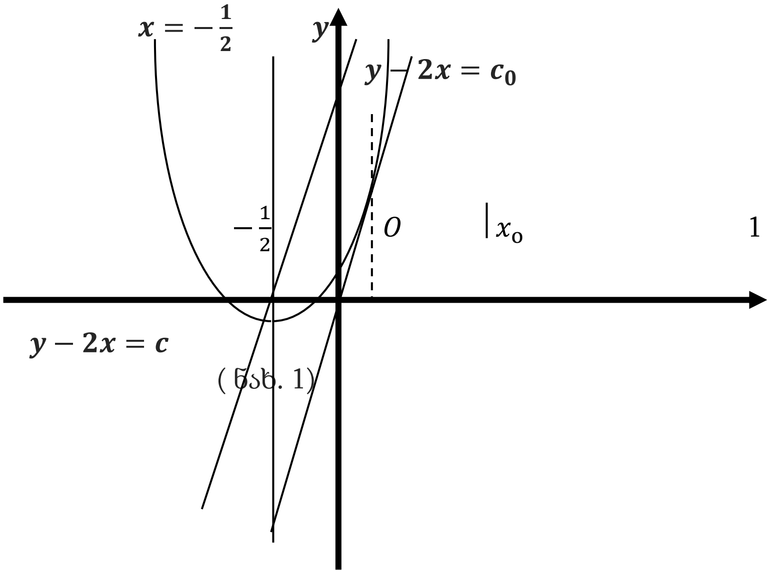
ცხადია, ჩვენს წინაშე დასმული ამოცანის ამონახსენია $a = -\frac{1}{2}$.

პასუხი: როცა $a = -\frac{1}{2}$.

ამოცანა №2. $\boldsymbol{y - x \geq x^2 + 1}$ უტოლობის ყველა ამონახსენს შორის იპოვეთ ის, რომელთათვისაც $\boldsymbol{y - 2x}$ გამოსახულება ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას.

ამოხსნა: მოცემული უტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით $\boldsymbol{y \geq x^2 + x + 1}$ საკორდინატო სიბრტყეზე იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომელიც მოიცემა უკანასკნელი უტოლობით, წარმოადგენს $\boldsymbol{y = x^2 + x + 1}$ პარაბოლას წერტილებს და მის ზემოთ მოთავსებულ წერტილთა ერთობლიობას (იხ. ნახ. 1).

$\boldsymbol{x}$



(ნახ. 1)

დაუშვათ, რომ $\boldsymbol{y - 2x}$ გამოსახულება ღებულობს რაიმე $\boldsymbol{c}$ მნიშვნელობას. ცხადია, ასეთი წერტილები მდებარეობს $\boldsymbol{y - 2x = c}$ წრფეზე და $\boldsymbol{c}$-ს ზრდასთან ერთად ეს წრფე მოძრაობს თავისი თავის პარალელურად ქვემოდან ზემოთ. ასევე, აშკარაა, რომ $\boldsymbol{c}$ - ღებულობს თავის უმცირეს მნიშვნელობას $\boldsymbol{c_0}$ მნიშვნელობას, როცა აღნიშნული

$$y - 2x = c_0$$

წრფე ეხება პარაბოლას რომელიღაც x_0 წერტილში.

$y = x^2 + x + 1$ პარაბოლას მხები x_0 წერტილში შემდეგნაირად მოიცემა

$$y = x_0{}^2 + x_0 + 1 + (2x_0 + 1)(x - x_0) = (2x_0 + 1)x + 1 - x_0{}^2$$

რადგან ეს მხები ემთხვევა $y = 2x + c_0$ წრფეს, გამომდინარეობს

$$2x_0 + 1 = 2 \quad => \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

საიდანაც $c_0 = \frac{3}{4}$ და $y_0 = x_0{}^2 + x_0 + 1 = \frac{7}{4}$

პასუხი: $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

საქართველოს საჯარო სკოლების უმრავლესობაში ფუნქციის წარმოებულის და მისი გამოყენების შესახებ საუბარი არ არის, ამიტომ სავალდებულოდ მიგვაჩნია აღნიშნული *ამოცანა* ყველა მოსწავლისათვის იყოს ხელმისაწვდომი. ახლა განვიხილოთ *ამოცანა №2*-ის ამოხსნის ნიმუში წარმოებულის გამოყენების გარეშე.

ამოცანა №2. $y - x \geq x^2 + 1$ უტოლობის ყველა ამონახსენს შორის იპოვეთ ის, რომელთათვისაც $y - 2x$ გამოსახულება ღებულობს უმცირეს მნიშვნელობას.

ამოხსნა: მოცემული უტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$y \geq x^2 + x + 1$$

საკოორდინატო სიბრტყეზე იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომელიც მოიცემა უკანასკნელი უტოლობით, წარმოადგენს $y = x^2 + x + 1$ პარაბოლას წერტილებს და მის ზემოთ მოთავსებულ წერტილთა ერთობლიობას (იხ. ნახ. 1). დაუშვათ, რომ $y - 2x$ გამოსახულება ღებულობს რაიმე c მნიშვნელობას. ცხადია, ასეთი წერტილები მდებარეობს $y - 2x = c$ წრფეზე და c-ს ზრდასთან ერთად ეს წრფე მოძრაობს თავისი თავის პარალელურად ქვემოდან ზემოთ. ასევე, აშკარაა, რომ c - ღებულობს თავის უმცირეს მნიშვნელობას c_0 მნიშვნელობას, როცა აღნიშნული

$$y - 2x = c_0$$

წრფე ეხება პარაბოლას რომელიღაც x_0 წერტილში. იმისათვის რომ შესრულდეს ამოცანის პირობა ცხადია, რომ

$$x^2 + x + 1 = 2x + c_0$$

განტოლებას უნდა ჰქონდეს ერთი ამონახსენი. მაშასადამე,

$$x^2 - x + 1 - c_0 = 0$$

განტოლების დისკრიმინანტი 0-ის ტოლია.

ე. ი. $D = 1 - 4(1 - c_0) = 0$, საიდანაც $c_0 = \frac{3}{4}$.

$x^2 + x + 1 = 2x + c_0$ განტოლებაში შევიტანოთ მიღებული $c_0 = \frac{3}{4}$ -ის მნიშვნელობა და ვიპოვოთ შესაბამისი x.

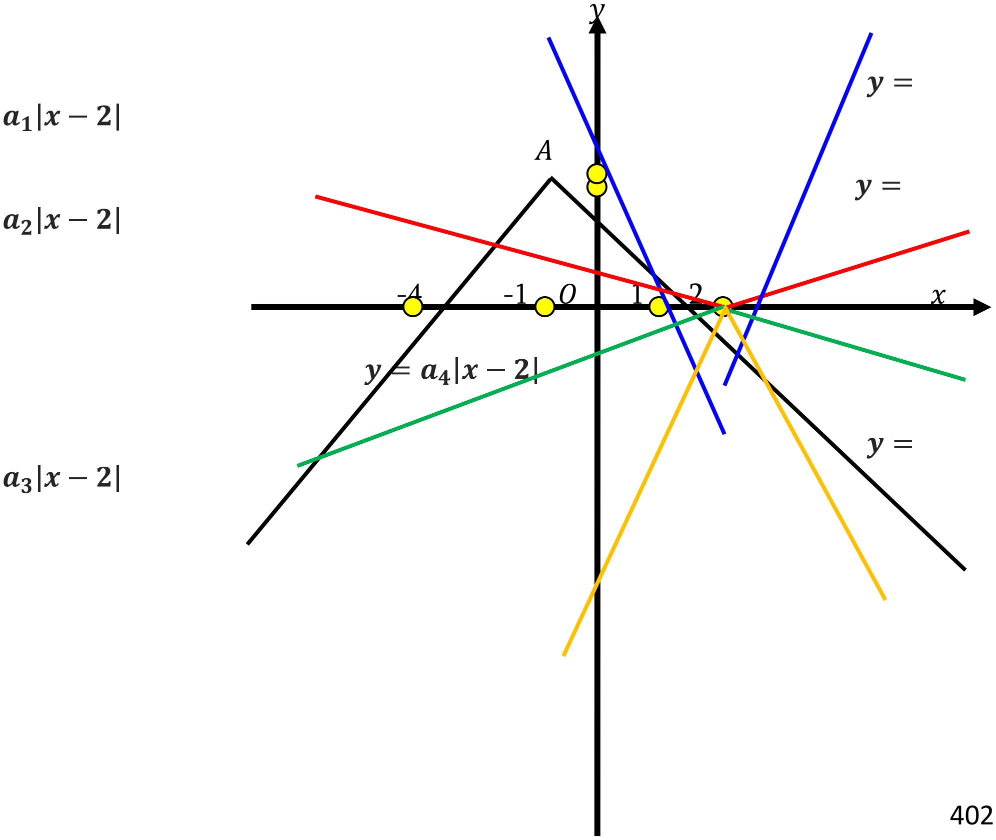
გვექნება: $x^2+x+1=2x+\frac{3}{4}$ => $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ => $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ => $x=\frac{1}{2}$.

$$y=2-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

პასუხი: $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$.

ამოცანა №3. $\boldsymbol{a}$ **პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის ამოხსენით $|x+1|+a|x-2|=3$ განტოლება.**

ამოხსნა: მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით $a|x-2|=3-|x+1|$ ავაგოთ $y=3-|x+1|$ ფუნქციის გრაფიკი (იხ. ნახ. 2). ასევე ამავე ნახაზზე ავაგოთ
$y=a|x-2|$ ფუნქციის გრაფიკები სხვადასხვა a-სთვის. ცხადია, სხვადასხვა a -სთვის ისინი წარმოადგენენ ე. წ. „კუთხეებს“ წვეროთი (2;0) წერტილში, რომლებიც გამოსახულია ნახაზზე სხვადასხვა ფერით. თუ $a>0$ „კუთხის“ გვერდები მიმართულია ზემოთ, ხოლო თუ $a<0$ მაშინ „კუთხის“ გვერდები მიმართულია ქვემოთ.



$y = 3 - |x+1|$ ფუნქციის გრაფიკიც გადის (2; 0) წერტილზე და ამასთან მისი გრაფიკი, არ გადაკვეთს $y = a|x-2|$ ფუნქციის გრაფიკს სხვა წერტილში გარდა $x = 2$, როცა $a > 1$.
ანალოგიურად, $y = 3 - |x+1|$ ფუნქციის გრაფიკი გადის (2; 0) წერტილზე და ამასთან მისი გრაფიკი, არ გადაკვეთს $y = a|x-2|$ ფუნქციის გრაფიკს სხვა წერტილში გარდა $x = 2$, როცა $a < -1$.
როცა $a = 1$; ორივე გრაფიკს აქვთ საერთო მონაკვეთი, რომელიც ნახაზზე წარმოდგენილია A-დან (2; 0) წერტილამდე. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლების ამონახსენია $x \in [-1; 2]$.
როცა $-1 < a < 1$; $y = 3 - |x+1|$ და $y = a|x-2|$ ფუნქციის გრაფიკებს გარდა (2; 0) წერტილსა, აქვთ კიდევ ერთი საერთო წერტილი, რომლის პოვნა შესაძლებელია $x + 4 = 2a - ax$ ტოლობიდან, კერძოდ, კი $x = \frac{2a-4}{a+1}$.
და ბოლოს როცა $a = -1$; ორივე გრაფიკს აქვთ საერთო სხივი, რომელის სათავეა (2; 0) წერტილი და მდებარეობს $x = 2$ წრფის მარჯვნივ. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლების ამონახსენია $x \geq 2$ ანუ $x \in [2; +\infty)$.
პასუხი: როცა $|a| > 1$, მაშინ $x = 2$; როცა $a = 1$, მაშინ $x \in [-1; 2]$; როცა $a = -1$, მაშინ $x \in [2; +\infty)$; როცა $|a| < 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2a-4}{a+1}$.

გამოყენებული ლიტერატურა:

ორმოცაძე (2015). თეიმურაზ ორმოცაძე. მათემატიკა. აბიტურიენტებისათვის (თეორია და პრაქტიკა). გამომცემლობა „დამანი“;თბილისი.

Болгарский (1981). Болгарский Б. В. К вопросу о воспитателном значении преподавания математики. Математика в школе. №1;

Письенный (1999). Дмитрий Письенный. Готовимся к экзамену по Математике Издательство „Айрис пресс“, Москва;

Чезркасов (1999). Олег Чезркасов. Андрей Якушев. Математика. Издательство „Айрис пресс“, Москва;

Ткачук (2004). В. В. Ткачук. Математика абитуриенту, Москва.