

ნესტან კეკელია¹, ელენე ესიავა²

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

DOI: <https://doi.org/10.52340/sou.2023.19.53>

კმაყოფილების თეორია და რისკისადმი დამოკიდებულების მათემატიკური ანალიზი

აბსტრაქტი. მოცემული ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს კმაყოფილების თეორიასა და რისკებისადმი ინდივიდების დამოკიდებულების ურთიერთკავშირის მათემატიკური ანალიზი. ინდივიდების კმაყოფილებისა და მათი რისკებისადმი დამოკიდებულების ურთიერთკავშირის თვალსაჩინო მაგალითად შეიძლება დავასახელოთ აზარტული თამაშები. ინდივიდების კმაყოფილებისა და მოსალოდნელი კმაყოფილების განსაზღვრისათვის გამოყენებულია სამი სხვადასხვა ტიპის ფუნქცია, ჩაზნექილი, ამოზნექილი და წრფივი ფუნქციები. ამასთან განხილულია რისკებისადმი ადამიანის დამოკიდებულების სამივე შემთხვევა. გაკეთებულია შესაბამისი მათემატიკური ანალიზი და მიღებულია დასკვნა.

საკვანძო სიტყვები. რისკი, სასარგებლო ფუნქცია, მათემატიკური ანალიზი, მოსალოდნელი სარგებლიანობა.

Nestan Kekelia³, Elene Esiava⁴

Sokhumi State University

Utility theory and mathematical analysis of risk attitude

Abstract. In a world full of uncertainty, individuals have to make different choices. Based on their risk preferences, decision-making processes differ. Risk preference

¹ ნესტან კეკელია - სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის ფაკულტეტის დეკანი, ასოცირებული პროფესორი.

² ელენე ესიავა - სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის უნივერსიტეტის საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის ფაკულტეტის სტუდენტი.

³ Nestan Kekelia - Dean of the Faculty of Natural Sciences, Mathematics, Technology and Pharmacy of Sokhumi State University, associate professor;

⁴ Elene Esiava - Student of the Faculty of Natural Sciences, Mathematics, Technology and Pharmacy of Sokhumi State University;

encounters an individual's willingness to bear the risk. Usually, economists distinguish three types. Particularly they mention risk-averse, risk-seeking, and risk-neutral individuals. Risk-averse is the person who prefers a sure amount of cash over gambling on cash, while risk-seeking is the person who favors gambling on cash over a sure amount of cash, and risk-neutral is the person who is indifferent between sure amount and gambling. Even though it is not directly possible to observe an individual's risk preferences, the utility theory can be used to depict a choice for the risk level. The following paper aims to determine the individual's risk preference from utility functions and provide mathematical analysis.

Keywords: Risk, utility function, mathematical analysis, expected utility.

შესავალი. სამყარო ასე ვთქვათ, სხვადასხვა სახის შედეგების, განსაზღვრულობისა და განუსაზღვრელობის ნიშნების მატარებელი რისკებით გაივსო. ბუნებრივია, რისკს მეტი ყურადღება არა მხოლოდ მეცნიერების მხრიდან მიექცა, არამედ, ცალკეული ადამიანებისათვისაც შესამჩნევი გახდა და მისი მართვის მეთოდების ძიება ახალ მიმართულებად ჩამოყალიბდა. აუცილებელი გახდა რისკების მართვის, მათი შეფასების და პროგნოზირების ახალი მიდგომების დამუშავება, რომელიც მათემატიკური აპარატის გარეშე გადაუწყვეტელი დარჩებოდა დღესაც.

დისკუსია. საერთო გავრცელებულ თეორიად ეკონომიკურ რისკებში ითვლება ნეოკლასიკური თეორია კეინსის დამატებებით. კეინსმა პირველმა მოგვცა სამეწარმეო რისკების კლასიფიკაცია, შეავსო კმაყოფილების ფაქტორით. უნდა აღინიშნოს, რომ რისკების მართვაში დიდი მნიშვნელობა თვით პიროვნებას ენიჭება, რომელიც რისკის შეფასებას ახდენს, ვინაიდან ცალკეული ადამიანები მოსალოდნელი რისკის განვითარებას სხვადასხვაგვარად უყურებენ (მკკ, 2021; ლოლობერიძე, 2019).

ის, რასაც გრძნობს მომხმარებელი (ადამიანი), არის რეალობა. როდესაც არ არის რისკი და არ არის განუსაზღვრელობა მომხმარებელი თავისი კმაყოფილების მაქსიმუმის აღებას ცდილობს. მაგრამ რეალურად ცხოვრებაში არსებობს რისკიც და განუსაზღვრელობაც. ჩვენ განვიხილავთ სიტუაციას, თუ როგორ ახდენს ინდივიდი მოსალოდნელი კმაყოფილების მაქსიმალიზაციას. მნიშვნელოვანია დავინახოთ განსხვავება კმაყოფილების მაქსიმალიზაციასა და მოსალოდნელი კმაყოფილების მაქსიმალიზაციას შორის. აღსანიშნავია რომ ეს ტერმინი პირველად მე-18 საუკუნეში ახსენა დანიელ ბერნულმა, მოგვიანებით კი, 1944 წელს თავის მეცნიერულ შრო-

მეზში ჯონ ფონ ნეიმანმა და ოსკარ მორგენშტერნმა. ჩვენს ანალიზს საფუძვლად სწორედ მათი თეორია უდევს, რომელიც გამოსახება შემდეგი ფორმულით (მკვ, 2021).

$$U(G) = p_1 \cdot u(x_1) + \dots + p_n \cdot u(x_n)$$

სადაც $u(x)$ წარმოადგენს ინდივიდის კმაყოფილებას, $U(G)$ მარტივად რომ ვთქვათ, კმაყოფილების მოსალოდნელი მნიშვნელობას, ხოლო თითოეული $p_i \geq 0$ არის იმის ალბათობა, მაგალითად, აზარტული თამაშის დროს, რომ რაღაც შედეგი დგება. ცხადია, ჩვენ ვითხოვთ, რომ

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (2) \quad (\text{Sharpe, N. R., Veaux, R. D., \& Velleman, P. F. 2014}).$$

ამასთან, ჩვენს კვლევაში მნიშვნელოვანია, CE-ს, ეგრეთწოდებული „Certainty Equivalent“ (ნდობის ეკვივალენტი)-ისა და RP-ს, ანუ „Risk Premium“ (რისკის საკუთარ თავზე აღება) -ის განსაზღვრა. G აზარტული თამაშის CE(G) არის ისეთი ნაღდი თანხა c , რომ $u(c) = U(G)$, ხოლო G აზარტული თამაშის RP(G) წარმოადგენს G აზარტული თამაშის $\mu(G)$ მოსალოდნელი თანხისა და მისი ნდობის ეკვივალენტის $c = CE(G)$ -ს სხვაობას:

$$RP(G) = \mu(G) - CE(G)$$

ზოგადად რისკებისადმი დამოკიდებულობის მიხედვით განასხვავებენ ადამიანების შემდეგ 3 ტიპს: რისკისადმი მიდრეკილი, რისკისადმი თავშეკავებული და რისკის მიმართ ნეიტრალური (Weber M. 2001).

იმ ფაქტდან გამომდინარე, რომ ძირითადად ფუნქცია კონკრეტულ მონაკვეთზე ან ჩაზნექილია, ან ამოზნექილ, ან სულაც წრფივი (ცხადია არ განიხილება დისკრეტული ფუნქციები), შემდეგი 3 ფუნქცია $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ და $y = x$ ამ ეტაპზე სრულიად საკმარისია ადამიანების რისკისადმი დამოკიდებულობის სამივე კატეგორიის საჩვენებლად, ამასთან, კმაყოფილების თეორიასა და რისკებისადმი ინდივიდების დამოკიდებულობის ურთიერთკავშირის დასანახად.

შემთხვევა 1: რისკისადმი თავშეკავებული.

კერძო შემთხვევაში $u(x)$ -ის მნიშვნელობად ფორმულა (1) -ში განვიხილოთ $y = \sqrt{x}$ და გამოვიკვლიოთ ინდივიდის რისკისადმი დამოკიდებულება (Aimin, H. 2010). დავუშვათ, ადამიანი იღებს \$9 ალბათობით p_1 და \$81 ალბათობით p_2 . ფორმულა (2) ის მიხედვით, p_1 და p_2 -ს რანდომული წესით შეგვიძლია მივანიჭოთ $2/3$ და $1/3$ შესაბამისად. ამ შემთხვევაში ადამიანისათვის მოსალოდნელი მნიშვნელობა იქნება :

$$\mu(G) = \frac{2}{3} * 9 + \frac{1}{3} * 81 = 33$$

ხოლო კმაყოფილების მოსალოდნელი მნიშვნელობა $U(G)$ იქნება:

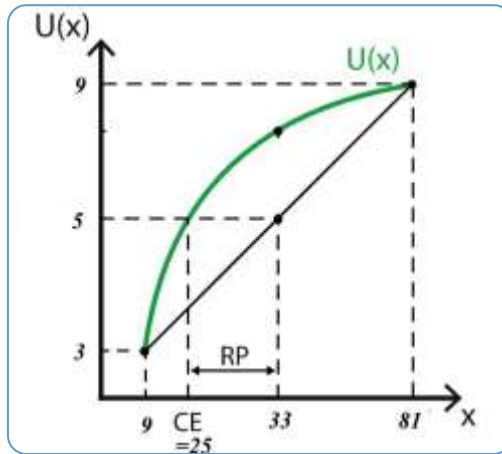
$$U(G) = \frac{2}{3} * \sqrt{9} + \frac{1}{3} * \sqrt{81} = 5$$

ამასთან, ზემოთხსენებული $CE(G)$ და $RP(G)$ ფუნქციები მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$CE(G) = 5^2 = 25$$

$$RP(G) = \mu - CE(G) = 33 - 25 = 8$$

განსახილველი შემთხვევა გრაფიკულად გამოისახება ასე:



ნახაზი.1

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ადამიანი ამ შემთხვევაში ღებულობს კმაყოფილების ერთიდაიგივე მნიშვნელობას 5-ს, ნაკლები თანხით. ანუ ზუსტი თანხა, რომელიც ინდივიდს მისცემს იგივე კმაყოფილებას რისკების გარეშე არის \$25, ნაკლები, ვიდრე აზარტული თამაშების დროს მოსალოდნელი თანხა \$33, ვინაიდან $\mu=33$. ამასთან, ის, რომ Certainly Equivalent ანუ $CE=25$ მეტყველებს, იმაზე რომ ეს ადამიანი მზადაა დათმოს გარკვეული თანხა, მოცემულ შემთხვევაში კი \$8, ვინაიდან $RP=8$, ოღონდ არ აიღოს თავისთავზე რისკი. მამასადამე, მიღებული შედეგებით ვხედავთ, რომ როდესაც $u(x) = \sqrt{x}$, RP არის დადებითი, რაც ცხადყოფს, რომ ადამიანი არ არის რისკის მოყვარული, შესაბამისად თავშეკავებულია რისკის მიმართ.

ახლა განვიხილოთ სხვა შემთხვევა, კერძოდ $u(x)$ -ის მნიშვნელობად ფორმულა (1) -ში განვიხილოთ $y = x^2$ და გამოვიკვლიოთ ინდივიდის რისკისადმი დამოკიდებულება[3]. დავუშვათ, ადამიანი იღებს \$50 ალბათობით p_1 და \$100 ალბათობით $p_2 = 1 - p_1$. ფორმულა (2) ის მიხედვით, p_1

და p_2 -ს რანდომული წესით შეგვიძლია მივანიჭოთ 12/25 და 13/25 შესაბამისად. ამ შემთხვევაში ადამიანისათვის მოსალოდნელი მნიშვნელობა იქნება :

$$\mu(G) = (1 - 13/25) \times 50 + 13/25 \times 100 = 76$$

ხოლო კმაყოფილების მოსალოდნელი მნიშვნელობა $U(G)$ იქნება:

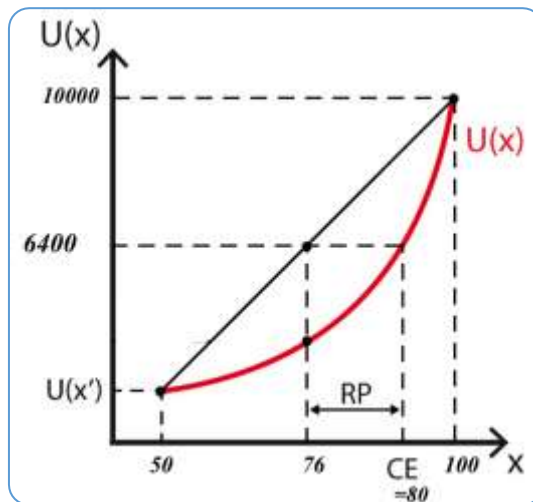
$$U(H) = (1 - 13/25) \times (50)^2 + 13/25 \times (100)^2 = 6400$$

ამასთან, ზემოთხსენებული $CE(G)$ და $RP(G)$ ფუნქციები მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$CE(H) = \sqrt{U(H)} = \sqrt{6400} = 80$$

$$RP(H) = 76 - 80 = -4$$

განსახილველი შემთხვევა გრაფიკულად გამოისახება ასე:



ნახაზი. 2

როგორც ნახაზი 2-დან ჩანს, ადამიანი ღებულობს კმაყოფილებს ერთიდა-იმავე მნიშვნელობას ანუ 6400, მაგრამ ამ შემთხვევაში უფრო მეტი თანხით. ანუ ზუსტი თანხა, რომელიც ინდივიდს მისცემს იგივე კმაყოფილებას რისკების გარეშე არის \$80, მეტი, ვიდრე აზარტული თამაშების დროს მოსალოდნელი თანხა \$76, ვინაიდან $\mu=76$. ის, რომ $CE=80$ მეტყველებს, იმაზე რომ ეს ადამიანი მზადაა გადაიხადოს გარკვეული თანხა, მოცემულ შემთხვევაში კი \$4, ოღონდ აიღოს თავისთავზე რისკი. მაშასადამე, მიღებული შედეგებით ვხედავთ RP არის უარყოფითი, რაც ცხადყოფს, რომ ეს ადამიანი არის რისკის მოყვარული, ანუ რისკისადმი მიდრეკილი.

განვიხილოთ მესამე კერძო შემთხვევა, $u(x)$ -ის მნიშვნელობად ფორმულა (1) -ში განვიხილოთ $y = x$ და გამოვიკვლიოთ ინდივიდის რისკისადმი დამოკიდებულება (Aimin, H. 2010). დავუშვათ, ადამიანი იღებს x' ალბათობით p_1 და x'' ალბათობით p_2 . ამ შემთხვევაში ადამიანისათვის მოსალოდნელი მნიშვნელობა იქნება :

$$\mu(G) = p_1 * x' + (1 - p_1) * x''$$

რაც მიგვანიშნებს იმაზე, რომ ადამიანის მოსალოდნელი მნიშვნელობა x -ის ტოლია ნებისმიერი p -სათვის რომელიც მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის

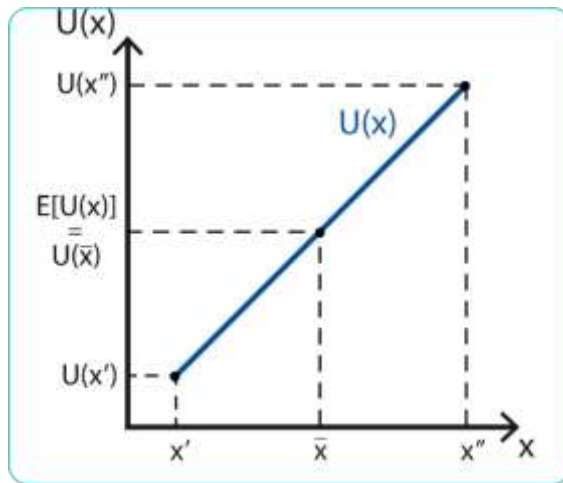
ამასთან კმაყოფილების მოსალოდნელი მნიშვნელობა $U(G)$ იქნება:

$$U(G) = p_1 * u(x') + (1 - p_1) * u(x'')$$

რაც იმაზე მიგვანიშნებს, რომ $\mu(G) = U(G) = x$, (ნებისმიერი p -სათვის რომელიც მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის) ამასთან, ზემოთხსენებული $CE(G) = \mu(G) = U(G) = x$, ხოლო $RP(G)$ მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობას:

$$RP(G) = \mu(G) - CE(G) = 0, \text{ რადგან } \mu(G) = CE(G),$$

განსახილველი შემთხვევა გრაფიკულად გამოისახება ასე:



ნახაზი 3.

ნახაზი 3 -დან ნათლად ჩანს, რომ ადამიანი ამ შემთხვევაში ღებულობს კმაყოფილების მუდმივ მნიშვნელობას, რაც იმაზე მეტყველებს, რომ ის არის ინდეფერენტული აღნიშნული საკითხის მიმართ. მიღებული შედეგებით ვხედავთ RP არის ნულის ტოლი, რაც ცხადყოფს, რომ ადამიანი რისკისადმი არის ნეიტრალურად დამოკიდებული.

დასკვნა

ზემოთ აღწერილი ანალიზი ცხადყოფს, რომ ინდივიდების რისკებისადმი დამოკიდებულობის განსაზღვრა რეალური ხდება კმაყოფილების ფუნქციების საშუალებით, იქიდან გამომდინარე, რომ ძირითადად ფუნქცია კონკრეტულ მონაკვეთზე ან ჩაზნექილია, ან ამოზნექილი, ან სულაც წრფივი (ცხადია არ განიხილება დისკრეტული ფუნქციები), ფუნქციები $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ და $y = x$ ამ ეტაპზე სრულიად საკმარისი აღმოჩნდა ადამიანების რისკისადმი დამოკიდებულობის სამივე კატეგორიის დადგენისათვის, კმაყოფილების თეორიასა და რისკებისადმი ინდივიდების დამოკიდებულობის ურთიერთკავშირის დასაჩვენებლად (Weber M. 2001). ჩვენ ვამბობთ, რომ ინდივიდი არის რისკისადმი თავშეკავებული, როდესაც RP დადებითია ნებისმიერი G აზარტული თამაშებისთვის; როდესაც RP ნეგატიურია ნებისმიერი G აზარტული თამაშებისთვის, ინდივიდი არის რისკის მოყვარული, ხოლო როდესაც RP არის ნული ნებისმიერი G აზარტული თამაშებისთვის, ჩვენ ვამბობთ, რომ ინდივიდი რისკის მიმართ ნეიტრალურია.

გამოყენებული ლიტერატურა:

- მკვ, 2021: მომხმარებლის კმაყოფილების კვლევა. (2021). <https://ipm.ge/index.php/ka/component/services/service/21>
- ლოლობერიძე თ. (2019). ეფექტურ რისკ-მენეჯმენტზე მოქმედი ფაქტორების სრულყოფის გზები თანამედროვე საბანკო სისტემაში. <https://dspace.nplg.gov.ge/bitstream/1234/316130/1/Disertacia.pdf>
- Aimin, H. (2010). Uncertainty, risk aversion and risk management in agriculture. Agriculture and Agricultural Science Procedia, 1, 152-156. <https://doi.org/10.1016/j.aaspro.2010.09.018>
- Sharpe, N. R., Veaux, R. D., & Velleman, P. F. (2014). Business statistics. Pearson College Division
- Weber M. (2001). Risk: Theories of decision and choice. <https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/certainty-equivalent>